

Caiet de vacanță
Matematică
Clasa a VI-a

**Suport teoretic, exerciții
și probleme aplicative**

Ediția a III-a

Editura Paralela 45

ALGEBRĂ**Capitolul I. MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE**

1.1. Mulțimi	5
1.2. Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale	9

Capitolul II. RAPOARTE ȘI PROPORȚII

2.1. Rapoarte	15
2.2. Titlul unui aliaj	17
2.3. Concentrația unei soluții	17
2.4. Scara unui desen	18
2.5. Procent	20
2.6. Proporții	22
2.7. Mărimi direct proporționale	23
2.8. Mărimi invers proporționale	25
2.9. Regula de trei simplă	27
2.10. Elemente de organizare a datelor. Probabilități	29

Capitolul III. MULȚIMEA NUMERELOR ÎNTREGI

3.1. Număr întreg. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr întreg. Compararea și ordonarea numerelor întregi	33
3.2. Operații cu numere întregi	36
3.3. Ecuații, inecuații și probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor sau inecuațiilor în contextul numerelor întregi	43

Capitolul IV. MULȚIMEA NUMERELOR RAȚIONALE

4.1. Număr rațional. Reprezentarea pe axa numerelor. Opusul și modulul unui număr rațional. Compararea și ordonarea numerelor raționale	49
4.2. Operații cu numere raționale	54
4.3. Ecuații în mulțimea numerelor raționale. Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor	63

GEOMETRIE**Capitolul V. NOȚIUNI GEOMETRICE FUNDAMENTALE**

5.1. Unghiuri. Unghiuri opuse la vârf. Congruența unghiurilor opuse la vârf	70
5.2. Unghiuri formate în jurul unui punct. Suma măsurilor unghiurilor în jurul unui punct.....	72
5.3. Unghiuri suplimentare. Unghiuri complementare	74
5.4. Unghiuri adiacente. Bisectoarea unui unghi. Construcția bisectoarei unui unghi	76

5.5.	Drepte paralele. Construcție intuitivă prin translație. Unghiuri formate de două drepte cu o secantă	81
5.6.	Axioma paralelelor. Criterii de paralelism	84
5.7.	Drepte perpendiculare în plan. Oblice. Aplicații practice în poligoane și corpuri geometrice. Distanța de la un punct la o dreaptă.....	89
5.8.	Mediatoarea unui segment. Construcția mediatoarei unui segment. Simetria față de o dreaptă	93
5.9.	Cerc. Arc de cerc. Unghi la centru. Măsuri	97
5.10.	Pozițiile unei drepte față de un cerc. Pozițiile relative a două cercuri.....	101

Capitolul VI. TRIUNGHIUL

6.1.	Triunghi. Definiție. Elemente. Clasificare. Perimetrul triunghiului	104
6.2.	Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi. Unghi exterior unui triunghi	108
6.3.	Construcția triunghiurilor. Inegalități între elementele triunghiului	111
6.4.	Linii importante în triunghi	
6.4.1.	Bisectoarele unghiurilor unui triunghi. Cerc înscris în triunghi	115
6.4.2.	Mediatoarele laturilor unui triunghi. Cerc circumscris unui triunghi	118
6.4.3.	Înălțimile unui triunghi. Ortocentrul triunghiului	121
6.4.4.	Medianele unui triunghi. Centrul de greutate al triunghiului	123
6.5.	Congruența triunghiurilor oarecare. Criterii de congruență a triunghiurilor: LUL, ULU, LLL	127
6.6.	Congruența triunghiurilor dreptunghice. Criterii de congruență a triunghiurilor dreptunghice: CC, IC, CU, IU	130
6.7.	Metoda triunghiurilor congruente. Proprietatea punctelor de pe bisectoarea unui unghi. Proprietatea punctelor de pe mediatoarea unui segment	133
6.8.	Proprietăți ale triunghiului isoscel. Proprietăți ale triunghiului echilateral	139
6.9.	Proprietăți ale triunghiului dreptunghic. Teorema lui Pitagora	147

TESTE RECAPITULATIVE

TESTUL 1.....	154
TESTUL 2.....	155
TESTUL 3.....	156
TESTUL 4.....	158
TESTUL 5.....	160
TESTUL 6	161

SOLUȚII	163
---------------	-----



Mulțimi

1. a) Mulțimea este bine determinate și distincte numite

b) Mulțimile se notează cu , cu sau fără indici: $A, B, C, \dots, A_1, A_2, A_3, \dots$.

c) Elementele unei mulțimi se notează cu : $a, b, \dots$.

d) Mulțimea care nu are nici un element se numește și se notează cu simbolul

2. a) Dacă A este o mulțime și x este un element al ei, atunci notăm și citim

b) O mulțime se numește numerică dacă

3. Orice mulțime poate fi dată în trei moduri:

a) **explicit**, prin

b) **implicit**,

c) **cu ajutorul unor diagrame Venn-Euler**

4. Mulțimea numerelor naturale mai mici decât 5 reprezentată:

a) **explicit** este $M =$

b) **printr-o proprietate caracteristică** este $M =$

c) **cu ajutorul diagramei Venn-Euler** este:

5. O mulțime A se numește:

a) **mulțime finită** dacă

de exemplu: mulțimea divizorilor numărului 6 este $D_6 =$

b) **mulțime infinită**, de exemplu: mulțimea multiplilor

unui număr natural este $M_6 =$

6. Numărul de elemente ale unei mulțimi A se notează cu și card $D_6 =$

a) Două mulțimi A și B sunt egale dacă și notăm
în caz contrar spunem că și notăm

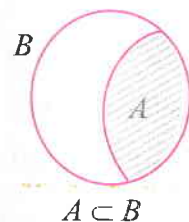
b) Mulțimile $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}^* \text{ și } x \leq 4\}$ și $B = \{1, 2, 3, 4\}$ sunt
și notăm

c) Mulțimile $M = \{1, 2, 3\}$ și $N = \{a, b, c\}$ sunt și notăm
, însă au același număr de elemente, mai precis card $M = \dots = \dots$

8. a) O mulțime A este submulțime a mulțimii B dacă

Se notează $A \subseteq B$ și se citește „.....”

b) Dacă cel puțin un element al mulțimii A nu este element al mulțimii B ,
atunci și notăm



9. a) Mulțimea vidă este submulțime și notăm

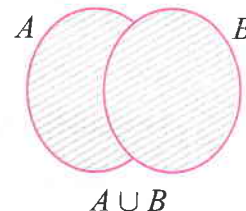
b) Orice mulțime este inclusă în ea însăși, adică

c) Mulțimea vidă și mulțimea însăși sunt
restul submulțimilor sunt submulțimi

10. a) Reuniunea a două mulțimi A și B este

scriem $A \cup B = \dots$ și

b) Dacă $A = \{1, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cup B = \dots$

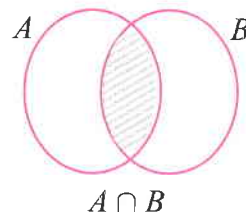


11. a) Intersecția a două mulțimi A și B este

scriem $A \cap B = \dots$ și

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A \cap B = \dots$

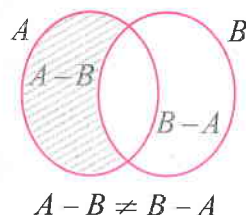
c) Dacă $A \cap B = \emptyset$, atunci A și B se numesc



12. a) Diferența mulțimilor A și B este și

scriem $A - B = \dots$

b) Dacă $A = \{2, 3, 5\}$ și $B = \{3, 5, 7\}$, atunci $A - B = \dots$
și $B - A = \dots$



13. a) Într-o mulțime fiecare element apare

b) Analizând diagramele de mai jos, avem reprezentată o mulțime în figura

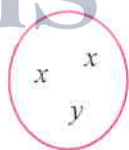


fig. 1

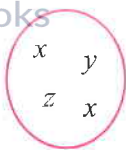


fig. 2

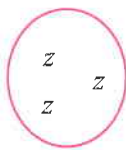


fig. 3

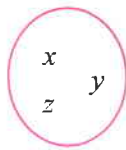


fig. 4

14. a) Submulțimile mulțimii $M = \{a, b, c\}$ sunt

b) Numărul de submulțimi ale unei mulțimi A este

15. Se consideră mulțimile $A = \{0, 1, 2, 3\}$ și $B = \{x^2 \mid x \in A\}$. Scrieți elementele mulțimilor:

$B =$; $A \cup B =$

$A \setminus B =$; $A \cap B =$

16. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate.

a) Într-o mulțime nu contează ordinea, mulțimile $A = \{a, b, c\}$ și

$B = \{b, a, c\}$ sunt pentru că sunt formate din

b) Mulțimea literelor din care este format cuvântul „element” este $C =$

c) Mulțimea cifrelor este o mulțime în timp ce mulțimea numerelor **naturale** este o mulțime

17. Se dă mulțimea $M = \{x \in \mathbb{N}^*, x \leq 3\}$.

a) Scrieți mulțimea M prin enumerarea elementelor, $M =$

b) Submulțimile improprii ale mulțimii M sunt

c) Submulțimile proprii ale mulțimii M sunt

18. Determinați a , știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

a) $\{1, a, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$;

b) $\{1, a, 3\} \subseteq \{1, 3, 4, 5\}$.

19. a) Determinați perechile (x, y) știind că $\{2, x, 4\} \subseteq \{1, 2, y, 3\}$.

b) Determinați perechile (x, y) știind că sunt îndeplinite simultan condițiile:

i) $\{2, 3, 4\} \subset \{3, x, y, 4\}$;

ii) $\{3, x, y, 4\} \subseteq \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soluție:

20. a) Elementele mulțimii $\{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ este restul împărțirii oricărui număr natural la } 5\}$ sunt:

b) Între elementul a și mulțimea $M = \{a, b, c\}$ există relația de
și notăm

c) Între mulțimile $A = \{1, 2\}$ și $B = \{0, 1, 2, 3\}$ există relația de
notăm și spunem că

21. Se consideră mulțimea $M = \{\overline{xy} \in \mathbb{N} \mid \overline{xy} : 23\}$.

a) Elementele mulțimii M sunt

b) Submulțimile lui M formate din câte două elemente sunt

c) Submulțimile lui M formate din câte trei elemente sunt

22. Completați spațiile punctate astfel încât să obțineți propoziții adevărate.

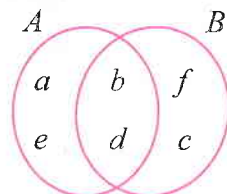
a) $A \cup B = \{x \mid x \in A \dots\dots\dots x \in B\}$; c) $A \setminus B = \{x \mid x \in A \dots\dots\dots x \notin B\}$;

b) $A \cap B = \{x \mid x \in A \dots\dots\dots x \in B\}$; d) $B \setminus A = \{x \mid x \in B \dots\dots\dots x \notin A\}$.

23. Analizați, cu atenție, diagrama și specificați dacă propozițiile ce urmează sunt adevărate sau false:

$a \in A \cap B \dots\dots\dots$; $b \notin A \cap B \dots\dots\dots$; $\{b, d\} = A \cap B \dots\dots\dots$;

$d \notin A \cap B \dots\dots\dots$; $e \in A \setminus B \dots\dots\dots$; $\{a, c\} \subset A \cup B \dots\dots\dots$.



24. Se consideră două mulțimi oarecare A și B .

a) Dacă $A \cap B = A \cup B$, atunci

b) Dacă $A \subseteq B$ și $B \subseteq A$, atunci

25. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

a) Cel mai mare divizor propriu al mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este

b) Cardinalul mulțimii $\mathcal{D}_{48}$ este

c) Cel mai mic element al mulțimii $\mathcal{M}_6 \cap \mathcal{M}_8$ este

d) Din mulțimea $\mathcal{M}_8$, elementele de forma $\overline{ab}$ sunt

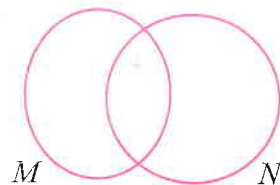
26. Dacă $A = \{0, 1, 2, 4\}$ și $B = \{0, 2, 5, 6\}$, atunci:

$A \cup B = \dots\dots\dots$; $A \cap B = \dots\dots\dots$;

$A \setminus B = \dots\dots\dots$; $B \setminus A = \dots\dots\dots$.

27. Determinați mulțimile M și N , știind că $M \cup N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $M \cap N = \{2, 3, 4\}$ și $N \setminus M = \{5\}$.

Soluție:



28. Se consideră mulțimea $M = \{1, 2, 3\}$. Scrieți două mulțimi A și B care să îndeplinească condițiile:

- a) $A \cup B = M \Rightarrow A = \dots$; $B = \dots$
- b) $A \cap B = M \Rightarrow A = \dots$; $B = \dots$
- c) $A \setminus B = M \Rightarrow A = \dots$; $B = \dots$

29. Se consideră mulțimile $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid x^2 \leq 25\}$ și $B = \{z \in \mathbb{N} \mid z^3 \leq 27\}$. Scrieți informația corectă care completează spațiile punctate:

- $A = \dots$; $B = \dots$
- $A \cap B = \dots$; $A \cup B = \dots$
- $A \setminus B = \dots$; $B \setminus A = \dots$

30. Se consideră mulțimile $A = \{a \in \mathbb{N} \mid a = n^2 + n, n \in \mathbb{N}\}$ și $B = \{b \in \mathbb{N} \mid b = 2n + 1, n \in \mathbb{N}\}$.

- a) Pentru $n \leq 5$, scrieți mulțimile $A, B, A \cup B, A \cap B, A \setminus B, B \setminus A$.
 $\dots$
 $\dots$
- b) Arătați că cele două mulțimi sunt disjuncte.

31. a) Fie A mulțimea **divizorilor improprii** ai numărului 12. $A = \dots$
 b) Fie B mulțimea **divizorilor proprii** ai numărului 12. $B = \dots$
 c) Verificați dacă A și B sunt mulțimi disjuncte, $A \cap B = \dots$, adică mulțimile A și B sunt $\dots$

1.2

Descompunerea numerelor naturale în produs de numere prime. Determinarea celui mai mare divizor comun și celui mai mic multiplu comun. Proprietăți ale divizibilității în mulțimea numerelor naturale

1. a) Un număr natural n se numește **prim** dacă $\dots$
 b) Scrieți numerele prime mai mici decât 50 $\dots$
 c) Un număr natural n se numește **compus** dacă $\dots$

Orice număr natural nenul, diferit de 1, care nu este prim poate fi scris ca un produs de numere naturale prime.

2. a) Descompunerea în factori primi a unui număr natural înseamnă $\dots$



b) Descompuneți în factori primi următoarele numere naturale: 14 400, 15 600, 5 775.

Rezolvare:

$$\begin{array}{r|l} 14\,400 & 2^2 \cdot 5^2 \\ 144 & 2 \\ 72 & 2 \\ 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$14\,400 = 2^6 \cdot 3^2 \cdot 5^2$$

$$\begin{array}{r|l} 15\,600 & \\ \hline \end{array}$$

$$15\,600 =$$

$$\begin{array}{r|l} 5\,775 & \\ \hline \end{array}$$

$$5\,775 =$$

Singurul număr prim și par este 2.

3. a) Scrieți ca sumă de numere prime numerele naturale: 7; 12; 26; 34.

$$7 = 2 + 5; 12 = \dots; 26 = \dots; 34 = \dots$$

b) Suma a două numere prime este 99. Numerele sunt

c) Produsul dintre un număr natural prim și un număr impar este 4866. Calculați numerele.

4. Determinați numerele prime a , b și c , diferite două câte două, știind că:

$$a) 3a + 4b + 2c = 48.$$

Rezolvare: $4b$, $2c$ și 48 sunt numere pare și cum $3a + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 3a$ este număr par $\Rightarrow a$ este număr par și cum a este număr prim $\Rightarrow a = 2 \Rightarrow 3 \cdot 2 + 4b + 2c = 48 \Rightarrow 4b + 2c = 48 - 6 \Rightarrow 4b + 2c = 42 \mid : 2 \Rightarrow 2b + c = 21$. Cum $2b$ este număr par și 21 este număr impar $\Rightarrow c$ este număr impar și prim și avem:

$$c = 3 \Rightarrow 2b = 18 \Rightarrow b = 9 \text{ (nu este număr prim);}$$

$$c = 5 \Rightarrow 2b = 16 \Rightarrow b = 8 \text{ (nu este număr prim);}$$

$$c = 7 \Rightarrow 2b = 14 \Rightarrow b = 7;$$

$$c = 11 \Rightarrow 2b = 10 \Rightarrow b = 5;$$

$$c = 13 \Rightarrow 2b = 8 \Rightarrow b = 4 \text{ (nu este număr prim);}$$

$$c = 17 \Rightarrow 2b = 4 \Rightarrow b = 2.$$

Cum numerele trebuie să fie diferite două câte două, rezultă că $a = 2$, $b = 5$ și $c = 11$ sunt numerele căutate.

$$b) a + 2b + 4c = 36$$

5. Determinați cifrele distincte a și b , astfel încât $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ să fie numere prime.

6. Determinați numerele naturale de forma $\overline{ab}$, știind că suma dintre $\overline{ab}$ și $\overline{ba}$ este pătrat perfect.

7. Dacă $\overline{abc}$ este număr prim, calculați câți divizori are numărul $\overline{abcabc}$.

8. a) Care este cel mai mic număr de trei cifre care are exact trei divizori?

b) Care este cel mai mare număr de două cifre care are exact patru divizori?

9. a) Cel mai mare divizor comun al numerelor naturale a și b se prescurtează
și se notează cu

b) Pentru a calcula c.m.m.d.c. se procedează astfel:

– se descompun

– se iau factorii

10. a) Cel mai mic multiplu comun al numerelor naturale a și b se prescurtează
și se notează cu

b) Pentru a calcula c.m.m.m.c. se procedează astfel:

– se descompun

– se iau factorii

11. Calculați cel mai mare divizor comun și cel mai mic multiplu comun al numerelor:

a) 840 și 672

$$\begin{array}{r|l} 840 & 2 \cdot 5 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 672 & 2 \\ 336 & 2 \\ 168 & 2 \\ 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$840 = 2^3 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$672 = 2^5 \cdot 3 \cdot 7;$$

$$[840; 672] = 2^5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 7 = 3360;$$

$$(840; 672) = 2^3 \cdot 3 \cdot 7 = 168.$$

675 =
864 =
[675; 864] =
(675; 864) =

Pentru $a, b \in \mathbb{N}$, avem $(a, b) \cdot [a, b] = a \cdot b$.

12. Verificați această proprietate pentru:

a) $a = 192$ și $b = 144$

192 |
144 |

192 = ; 144 =
(192; 144) = [192; 144] =
(192; 144) · [192; 144] =
192 · 144 = } $\Rightarrow (192; 144) \cdot [192; 144] =$
= = 192 · 144

b) $a = 450$ și $b = 224$.

450 |
224 |

450 = ; 224 =
(450; 224) = [450; 224] =
(450; 224) · [450; 224] =
450 · 224 = } $\Rightarrow$

Două sau mai multe numere naturale care au cel mai mare divizor comun egal cu 1 se numesc numere prime între ele.

13. Scrieți perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele: 9, 2, 4 și 14.

$2 = 2$; $9 = 3^2$; $4 = 2^2$; $14 = 2 \cdot 7$;

$(2, 9) = 1 \Rightarrow 2$ și 9 sunt prime între ele;

$(2, 4) = 2 \Rightarrow 2$ și 4 nu sunt prime între ele;

$(2, 14) =$; $(9, 14) =$;

$(9, 4) =$; $(4, 14) =$

Deci, perechile de numere prime între ele sunt $(2, 9)$;

14. Aflați cifra x astfel încât:

a) $(\overline{31x}, 2) = 1 \Rightarrow x$ nu trebuie să fie cifră pară $\Rightarrow x \in \{1, 3, 5, 7, 9\}$;

b) $(\overline{1x}, 3) = 1 \Rightarrow$

c) $(\overline{1x5}, 2) = 1, \Rightarrow$

d) $(\overline{53x}, 5) = 1 \Rightarrow$

15. În mulțimea numerelor naturale, divizibilitatea are următoarele proprietăți:

- a) **Reflexivitate**,
 b) **Antisimetrie**,
 c) **Tranzitivitate**,
 d) Dacă $a \mid b$ și $a \mid c$, atunci $a \mid$
 e) Dacă $a \mid b \cdot c$ și $(a, b) = 1$, atunci $a \mid$

16. a) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{2xy}$ divizibile cu 15.

b) Determinați toate numerele naturale de forma $\overline{3x1y}$ divizibile cu 6.

Rezolvare: a) $15 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow 5 \mid \overline{2xy}; 3 \mid \overline{2xy}$ și $(5, 3) = 1$. Dar $5 \mid \overline{2xy} \Leftrightarrow y \in \{0, 5\} \Leftrightarrow \overline{2xy} \in \{\overline{2x0}, \overline{2x5}\}$.

Cum $3 \mid \overline{2x0} \Leftrightarrow 3 \mid (2 + x + 0) \Leftrightarrow 3 \mid (2 + x) \Leftrightarrow x \in \{1, 4, 7\} \Leftrightarrow \overline{2x0} \in \{210, 240, 270\}$. Cum $3 \mid \overline{2x5} \Leftrightarrow 3 \mid (2 + x + 5) \Leftrightarrow 3 \mid (7 + x) \Leftrightarrow x \in \{2, 5, 8\} \Leftrightarrow \overline{2x5} \in \{225, 255, 285\}$. Numerele căutate sunt: 210, 225, 240, 255, 270, 285.

b) $6 \mid \overline{3x1y} \Leftrightarrow$

Numerele căutate sunt:

17. a) Determinați numerele naturale a și b , știind că cel mai mare divizor comun al lor este 7 și suma lor este 35.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 7 \Rightarrow a = 7x, b = 7y$, unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 35 \Rightarrow 7x + 7y = 35 \mid : 7 \Rightarrow x + y = 5$, adică:

x	1	4	2	3
y	4	1	3	2
$a = 7x$	7	28	14	21
$b = 7y$	28	7	21	14

Numerele căutate sunt: $a = 7, b = 28$ sau $a = 28, b = 7$ sau $a = 14, b = 21$ sau $a = 21, b = 14$.

b) Determinați numerele naturale a și b , știind că $(a, b) = 5$ și $a + b = 25$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 5 \Rightarrow a =$, $b =$, unde $(x, y) = 1$. Dar $a + b = 25 \Rightarrow$, adică:

x	
y	
$a = 5x$	
$b = 5y$	

Numerele căutate sunt:

c) Determinați numerele naturale a și b , știind că $(a, b) = 12$ și $a \cdot b = 2160$.

Rezolvare: Cum $(a, b) = 12 \Rightarrow a =$, $b =$, unde $(x, y) = 1$. Dar $a \cdot b = 2160 \Rightarrow$, adică:

x	
y	
$a = 12x$	
$b = 12y$	

Numerele căutate sunt:

18. a) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $2x+1 \in \mathcal{D}_{11}$.

b) Determinați $x \in \mathbb{N}$, astfel încât $x+1$ să fie divizor propriu al lui 6.

19. a) Arătați că numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

Rezolvare: $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3 \cdot 3^n \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^{n+1} + 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^{n+2} \cdot 5^n = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot (5 + 1 + 3) = 3^{n+1} \cdot 5^n \cdot 9 = 3^n \cdot 5^n \cdot 3 \cdot 9 = 27 \cdot 3^n \cdot 5^n = 27 \cdot (3 \cdot 5)^n = 27 \cdot 15^n$.
Cum $27 \cdot 15^n : 27 \Rightarrow$ numerele de forma $15^{n+1} + 3 \cdot 15^n + 3^{n+2} \cdot 5^n$ sunt divizibile cu 27.

b) Arătați că numerele de forma $72 \cdot 12^n + 3^{n+3} \cdot 4^{n+2}$ sunt divizibile cu 63, unde $n \in \mathbb{N}^*$.

20. Determinați cel mai mare număr natural nenul care împărțit la 7 dă câtul egal cu restul.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, $D = \hat{I} \cdot C + R$, $R < \hat{I}$, obținem $a = 7 \cdot C + R$, $R < 7 \Rightarrow R \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Cel mai mare număr natural se obține pentru $R = \dots$ și $a = \dots$.

21. Împărțind numerele 131, 284, 197 la același număr natural nenul se obțin resturile 7, 5 și 11 și câturile nenule. Aflați împărțitorul.

Rezolvare: Din teorema împărțirii cu rest, $D = \hat{I} \cdot C + R$, $R < \hat{I}$, avem: $131 = \hat{I} \cdot C_1 + 7$, $7 < \hat{I} \Rightarrow 131 - 7 = \hat{I} \cdot C_1$; $284 = \hat{I} \cdot C_2 + 5$, $5 < \hat{I} \Rightarrow 284 - 5 = \hat{I} \cdot C_2$; $197 = \hat{I} \cdot C_3 + 11$, $11 < \hat{I} \Rightarrow 197 - 11 = \hat{I} \cdot C_3 \Rightarrow 124 = \hat{I} \cdot C_1$, $279 = \hat{I} \cdot C_2$ și $186 = \hat{I} \cdot C_3$.

124

279

186

$124 = \dots$; $279 = \dots$; $186 = \dots$

$\hat{I} = (124, 279, 186) = \dots$

Cum $\hat{I} > 11 \Rightarrow \hat{I} = \dots$

22. Aflați cel mai mic număr natural care împărțit pe rând la 6, 15 și 24 dă resturile 4, 13 și, respectiv, 22.

Rezolvare: Fie a numărul căutat. Din teorema împărțirii cu rest, $D = \hat{I} \cdot C + R$, $R < \hat{I}$, avem:

$$a = 6 \cdot C_1 + 4 \mid + 2 \Rightarrow a + 2 = \dots ;$$

$$a = 15 \cdot C_2 + 13 \mid + 2 \Rightarrow a + 2 = \dots ;$$

$$a = 24 \cdot C_3 + 22 \mid + 2 \Rightarrow a + 2 = \dots \Rightarrow a + 2 = [6, 15, 24] = \dots \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = \dots$$

Numărul căutat este: $\dots$